Algorithmen und Programmierung 3, WS 2003/2004 — Aufgabe 29 b)

Vier Varianten, den Beweis zu führen *(zusammengefasst von Till Zoppke)*

In einem vollen binären Baum hat jeder innere Knoten zwei Kinder. Beweisen Sie, dass in einem vollen binären Baum mit n Blättern auf Tiefe $l_1, \ldots, l_n$ die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 1$$

0. Gebrauchsanweisung

   (a) Drucken Sie die Datei auf Papier.

   (b) Nehmen Sie sich die Beweise nacheinander vor. Skizzieren Sie dabei am Seitenrand, wie der Baum aussieht, welche Knoten entfernt werden und welche Höhe sie haben. Solche Zeichnungen fehlen im Druck, sind aber essentiell zum Verständnis.

1. Beweis per vollständiger Induktion über die Anzahl der Blätter

   I.A. n=1: Ein Baum mit einem Blatt besteht nur aus der Wurzel, welche Tiefe 0 hat. Damit gilt $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 2^0 = 1$.

   I.V. Für einen Baum mit n Blättern gelte $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 1$.

   I.S. $n \mapsto n+1$: oBdA seien die Knoten mit Index n und $n+1$ Geschwister. Geschwisterknoten haben die gleiche Tiefe. Deshalb können wir die Summe wie folgt umformen:

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2^{-l_i} = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-l_i} + 2^{-l_n} + 2^{-l_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-l_i} + 2 \cdot 2^{-l_n} = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-l_i} + 2^{-(l_n-1)}$$

   Wir entfernen nun die Knoten mit Index n und $n+1$ aus dem Baum. Damit wird ihr Elternknoten zu einem Blatt mit Tiefe $l_n - 1$. Dies entspricht der vorgenommenen rechnerischen Umformung. Wir setzen nun $l'_i := l_i$ (für $i < n$) und $l'_n := l_n$. Mit dieser Umbenennung erhalten wir eine Formel für den um zwei Knoten verringerten Baum. Dieser ist ein voller Baum mit n Blättern, also können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$= \sum_{i=1}^{n} 2^{-l'_i} = 1 \qquad \textit{q.e.d.}$$

2. Beweis per vollständiger Induktion über die Höhe des Baumes

   I.A. h=0: Ein Baum mit Höhe 0 besteht nur aus der Wurzel, welche Tiefe 0 hat. Damit gilt $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 2^0 = 1$.

   I.V. Für alle Bäume mit Höhe $\leq h$ gelte $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = 1$.

   I.S. $h \mapsto h+1$: Wir spalten die Summe entsprechend den beiden Teilbäumen der Wurzel auf. Die Indizes der Blätter des linken Teilbaumes seien $1, \ldots, k$, und $k+1, \ldots, n$ die Indizes der Blätter des rechten Teilbaums. Nun formen wir folgendermaßen um:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = \sum_{i=1}^{k} 2^{-l_i} + \sum_{i=k+1}^{n} 2^{-l_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} \cdot 2^{-(l_i-1)} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{2} \cdot 2^{-(l_i-1)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} 2^{-(l_i-1)} + \sum_{i=k+1}^{n} 2^{-(l_i-1)} \right)$$

   Wir spalten den Baum in zwei Teilbäume auf, indem wir die Wurzel entfernen. Die Tiefe jeden Knotens verringert sich um 1. Dies entspricht der vorgenommenen rechnerischen Umformung. Wir setzen nun $l'_i := l_i - 1$ (für $i \leq k$) und $l''_i := l_{i+k} - 1$ (für $i \leq m$ mit $m := n-k$). und beschreiben die beiden neuen Bäume. Da sich die Tiefe jeden Knotens verringert hat, hat der eine Baum nun Höhe h und der andere eine Höhe $\leq h$. Also können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} 2^{-l'_i} + \sum_{i=1}^{m} 2^{-l''_i} \right) = \frac{1}{2} \cdot (1+1) = 1 \qquad \textit{q.e.d.}$$

3. Beweis per vollständiger Induktion über die Tiefe der Knoten

Wir beweisen zunächst folgende Eigenschaft für volle binäre Bäume.

Satz: Sei T ein beliebiger voller binärer Baum mit Höhe h. Dann gilt für jeden Knoten $v \in T$:

$$\sum_{w \in B(v)} 2^{-l(w)} = 2^{-l(v)}$$

(mit $B(v)$ als Menge aller Blattknoten des Teilbaumes, dessen Wurzel v ist, und $l(v)$ als der Tiefe eines Knotens v).

Beweis:
I.A. $l(v) = h$: Jeder Knoten mit Tiefe h ist ein Blatt. Ein Blatt ist das einzige Blatt in dem Teilbaum, dessen Wurzel es ist. Also gilt $B(v) = \{v\}$ und damit trivial $\sum_{w \in B(v)} 2^{-l(w)} = 2^{-l(v)}$.

I.V. Für alle Knoten v auf Tiefe $l(v) = t$ gelte $\sum_{w \in N(v)} 2^{-l(w)} = 2^{-l(v)}$.

I.S. $t \mapsto t-1$: Sei v ein Knoten auf Tiefe $l(v) = t-1$. Falls v ein Blatt ist, ist die zu zeigende Eigenschaft trivial (vgl. I.A.). Falls v ein innerer Knoten ist, so verteilen sich die Blätter im Teilbaum von v auf die Kinder k, k': $B(v) = B(k) \cup B(k')$ und damit:

$$\sum_{w \in B(v)} 2^{-l(w)} = \sum_{w \in B(k)} 2^{-l(w)} + \sum_{w \in B(k')} 2^{-l(w)}$$

Die Knoten k und k' haben Tiefe $l(k) = l(k') = t$, weshalb wir nun die Induktionsvoraussetzung anwenden können:

$$= 2^{-l(k)} + 2^{-l(k')} = 2^{-t} + 2^{-t} = 2 \cdot 2^{-t} = 2^{-(t-1)} = 2^{-l(v)} \qquad q.e.d.$$

Aus der soeben gezeigten Eigenschaft ergibt sich die zu zeigende, indem wir für v die Wurzel des Teilbaums einsetzen. Dann ist $B(v)$ die Menge aller Blätter des Baumes und es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i} = \sum_{w \in B(v)} 2^{-l(w)} = 2^{-l(v)} = 2^0 = 1 \qquad q.e.d.$$

4. Beweis durch Analogie zum Entscheidungsbaum (nach Günter Rote)

In diesem Beweis nutzen wir Erkenntnisse aus der Stochastik. Wir sammeln zunächst einmal relevante Eigenschaften von Entscheidungsbäumen.

- Ein Zufallsexperiment besteht aus einer Folge von Ereignissen. Die Gesamtheit aller möglichen Ereignisfolgen lässt sich in einem Entscheidungsbaum darstellen.
- Jedes Ereignis markiert einen Knoten, der die möglichen Folgeereignisse als Kinder hat. Als Wurzel setzt man einen Knoten, welcher den Zustand vor dem ersten Ereigins darstellt, mit allen möglichen ersten Ereignissen als Kindern. Die Blätter stehen für jene Ereignisse, an denen eine bestimmte Abbruchbedingung eintritt, und das Experiment zuende ist.
- Die Kanten werden mit Zahlenwerten belegt. Der Wert p auf einer Kante vom Knoten v zu einem Kind w gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der das Ereignis w stattfindet (unter der Voraussetzung, dass die Ereignisfolge, die zu v führte, bereits stattgefunden hat).
- Die Summe aller von einem Knoten ausgehenden Wahrscheinlichkeiten ist 1.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Folge von Ereignissen eintritt, ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten des Weges, der der Ereignissfolge im Baum entspricht.
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Wege von der Wurzel zu den Blättern ist 1.

Nun betrachten wir einen beliebigen vollen binären Baum. Diesen Baum können wir als einen Entscheidungsbaum interpretieren, bei dem es zu jedem Ereignis zwei mögliche Folgeereignisse gibt (es sei denn, eine Abbruchbedingung greift, wodurch sich ein Blatt ergibt). Wir belegen jede Kante mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für den Weg zum Blatt v auf Tiefe l gleich 2^{-l}, da genau l Kanten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ passiert werden. Summiert man dies über alle Blätter, so erhält man die gesuchte Formel $\sum_{i=1}^{n} 2^{-l_i}$, welche sich gemäß obiger Überlegungen zu 1 auswertet. *q.e.d.*

Beispiel: Wirf eine Münze, bis einmal Kopf gefallen ist, aber wiederhole maximal drei mal.