Maria Gensel
Annika Imme

Aufgabe 36

Kann ein Nachbarknoten beim Einfügen ein Kind aus dem Überlauf aufnehmen, so kann alles bleiben wie es ist.

Kann ein Nachbarknoten beim Einfügen kein Kind aufnehmen, so müssen Knoten irgendwie geteilt. Der Nachbarknoten muss also auch voll sein (b=100). Die Knoten müssen also aufgeteilt werden, indem wir 3 neue Knoten erzeugen und die Elemente darauf verteilen. Insgesamt sind 201 Elemente zu verteilen. Jeder der 3 Knoten muss min. a Elemente haben. Also muss a min. 201/3 sein. Das sind 67 Elemente.

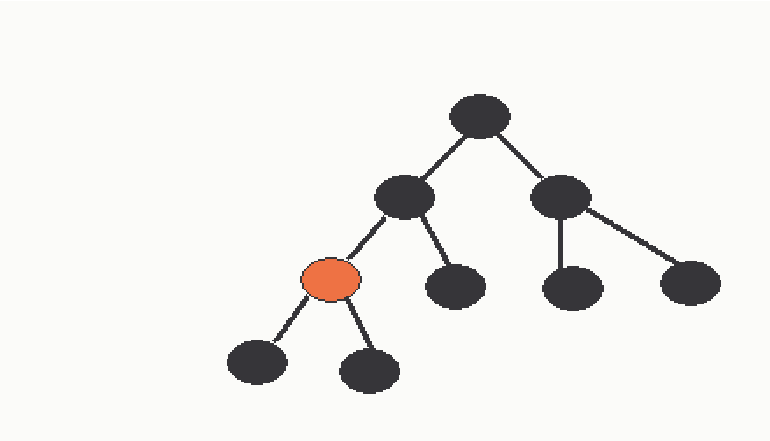
Kann beim Löschen ein Knoten einen Unterlauf aufnehmen, so ist alles ok.

Ist die Ausgleichung eines Unterlaufs durch das „Klauen“ eines Kindes nicht möglich, so müssen wir nun Knoten zusammenfassen. Wenn keiner der Nachbarn ein Kind abgeben kann, können wir davon ausgehen, dass alle genau a Kinder haben.
Das bedeutet wir müssen auf die 2 Nachbarknoten jeweils (a-1)/2 Elemente verteilen. Gehen wir davon aus, dass a=67, so werden auf jeweils 33 Elemente auf die anderen verteilt. Also 67+33 = 100. Also die maximale Anzahl ohne Überlauf.

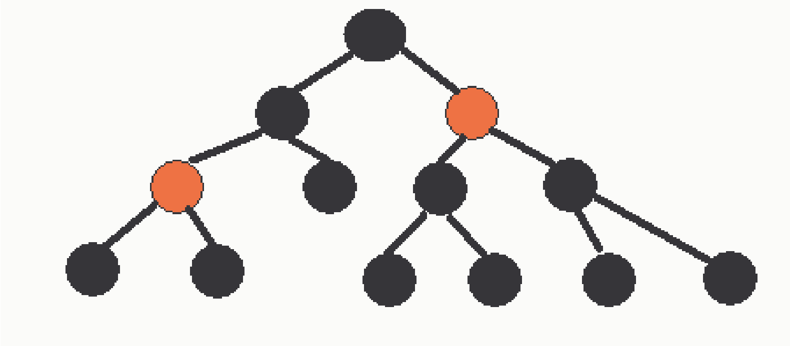
Also ist maximale a für geringe Speicherverschwendung gleich 67.

Die Wurzel ist ein Sonderfall. Hier lassen wir zu, dass die Wurzel 1 bis 133 Elemente hat. Wird nun ein Element hinzugefügt, so kann die Wurzel in zwei Knoten à 67 Elemente aufgespalten werden.

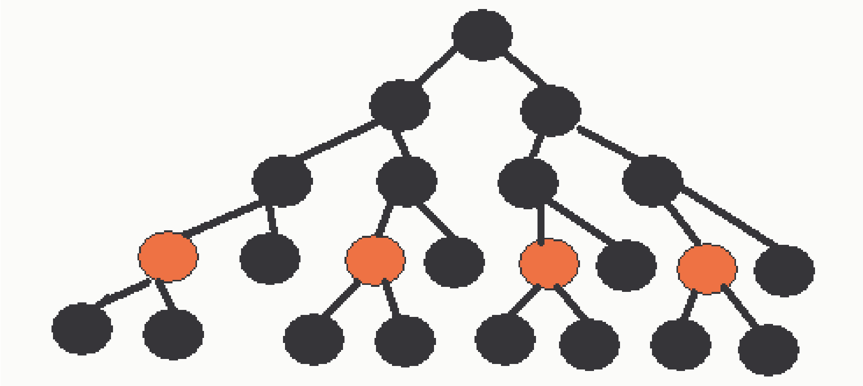
Aufgabe 37



Rot-Schwarz-Baum mit 5 Blättern

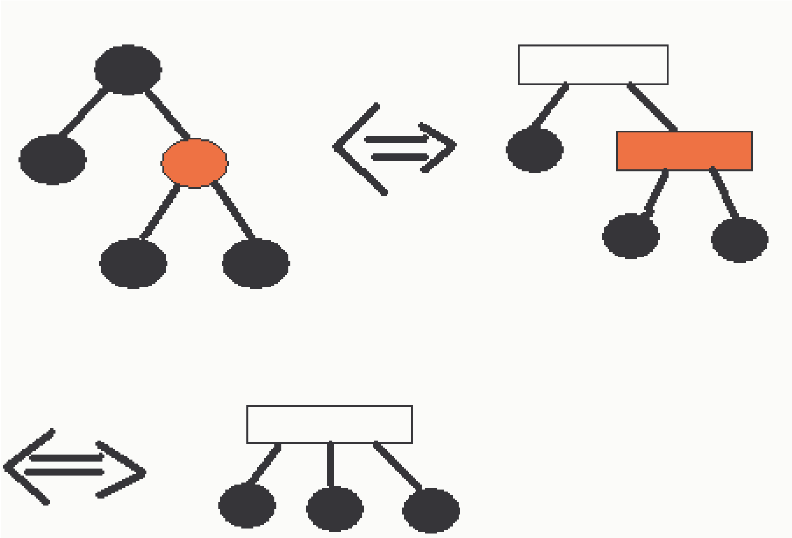


Rot-Schwarz-Baum mit 7 Blättern



Rot-Schwarz-Baum mit 12 Blättern

Zeigen, dass Rot-Schwarz in 2-3-Baum:
Alle Blätter in dem 2-3-Baum haben die gleiche Höhe, da in einem Rot-Schwarz-Baum jeder Weg zu einem Blatt gleich viele schwarze Knoten enthalten muss. Bei der Umwandlung in einen 2-3-Baum rutscht jeder rote Knoten mit seinen Kindern eine Ebene höher (siehe folgende Abbildung), dadurch haben alle Wege im 2-3-Baum die gleiche Länge.

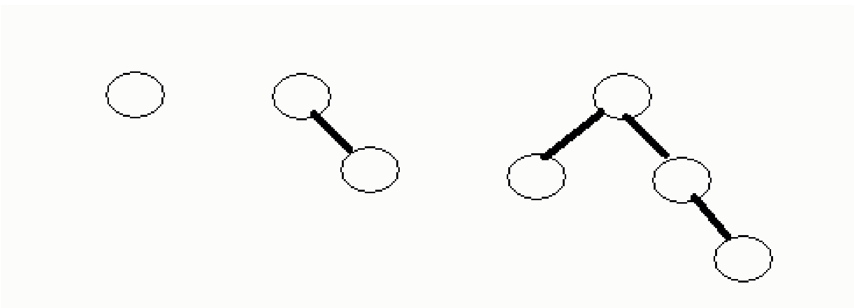


Zeigen, dass 2-3-Baum in Rot-Schwarz-Baum:
Geht wie oben nur andersrum.
Es gibt keine Knoten im 2-3-Baum die vier Kinder haben können, dadurch kann es auch nicht passieren, dass ein Knoten im Rot-Schwarz-Baum zwei rote Kinder hat. Durch das einfügen eines roten Knotens verändert sich nicht die Anzahl der schwarzen Knoten auf einem Weg von der Wurzel zum Blatt in einem Rot-Schwarz-Baum.

Aufgabe 38

Wir gehen von einem AVL-Baum aus, bei dem die Knoten auch nur ein Kind haben können. Hat jeder Knoten 2 Kinder, so geht es analog zu unserem Beweis, die Fibonacci-Folge verschiebt sich aber: 1 2 3 5 ….. und nicht 1 1 2 3 5 …

Zu Beweisen: $A_h=A_{h-1}+A_{h-2}$
I.A.:



$h = 0$	$h=1$	$h=2$
$A_h=1$	$A_h=1$	$A_h=2$

I.A. ist erfüllt.
I.V.: $A_h=A_{h-1}+A_{h-2}$
I.B.: $A_{h+1}=A_h+A_{h-1}$
Formel für Fibonacci-Zahlen: $A_n=A_{n-1}+A_{n-2}$

Haben wir einen beliebigen AVL-Baum mit Höhe A_{h+1} und mit minimaler Anzahl an Blättern, so spalten wir den Baum in zwei Teilbäume auf, indem wir die Wurzel entfernen. Entfernt man die Wurzel verringert sich die Höhe der Teilbäume um eins. Die Höhe des rechten Teilbaumes entspricht dann der neunen Höhe A_h und die Höhe des linken Teilbaumes ist auf Grund der minimalen Blätteranzahl um eins kleiner als die Höhe des rechten Teilbaumes (odergleich), also A_{h-1}. Für A_h und A_{h-1} gilt Blätteranzahl = Fibonacci-Zahl durch I.V..
Also ist I.B. auch erfüllt.

Innere Knoten:
$n(h) = n(h-1) + n(h-2) + 1 = A_{h+1}-1$ also auch eine Fibonacci-Folge
Also, Anzahl der inneren Knoten seiner Teilbäume plus 1 für die neue Wurzel.