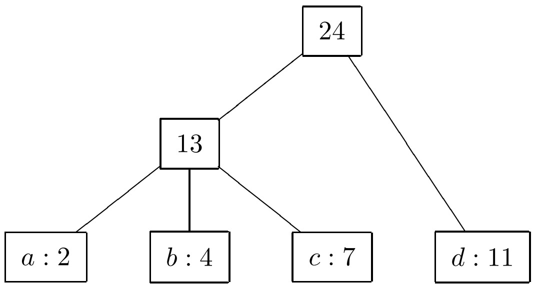
Algorithmen und Programmierung III - Übungsblatt Nr.07

Robin deLall | **Mo 7** | **WS 2003/2004** | Marcus Michalsky

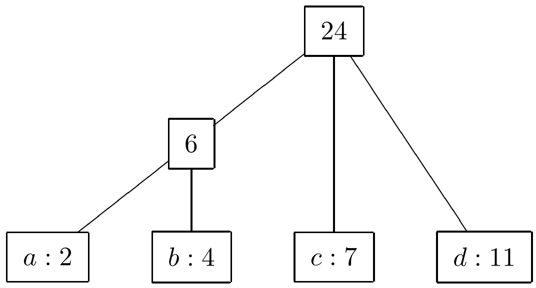
41. Angenommen wir haben eine Menge M mit n Elementen, mit relativen Häufigkeiten:

$$(p_1, \dots, p_8) = \left(\frac{2}{56}, \frac{3}{56}, \frac{4}{56}, \frac{6}{56}, \frac{7}{56}, \frac{10}{56}, \frac{11}{56}, \frac{13}{56}\right).$$

Nach einigen Versuchen erkennt man, dass wenn man den ursprünglichen Algorithmus zur Konstruktion eines optimalen Codes (für Binärbäume) verwendet (also immer drei statt zwei der kleinsten Elemente nimmt) nicht unbedingt einen optimalen Code bekommt, nämlich genau dann, wenn $|M|$ gerade ist: (Bsp. mit $M = \{a, b, c, d\}$ und $(p_1, \dots, p_4) = (\frac{2}{24}, \frac{4}{24}, \frac{7}{24}, \frac{11}{24})$)



generierter Baum

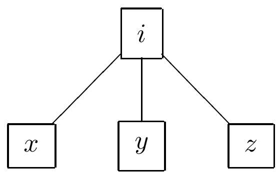


optimaler (Code-)Baum

Folgender Algorithmus beschreibt (richtige) Vorgehensweise:

(a) Ist $|M|$ gerade, dann füge ein Element mit Häufigkeit 0 in M ein.
// (Ab hier ist $|M|$ auf jeden Fall ungerade)

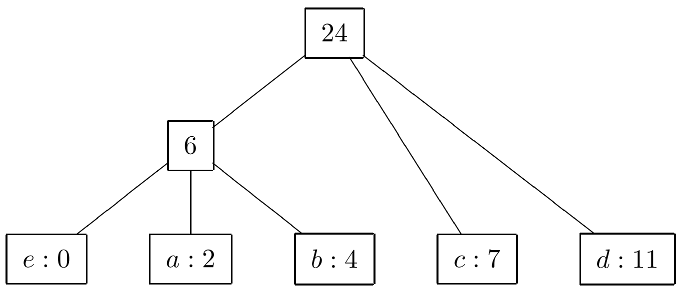
(b) - Setze $M' = M$
- Entferne die drei kleinsten Elemente aus M' (x,y,z) und hänge sie an einen neuen Knoten K:



// (Der Knoten K hat den Wert $i = p(x) + p(y) + p(z)$. -Füge den Knoten K in die Menge M' ein.

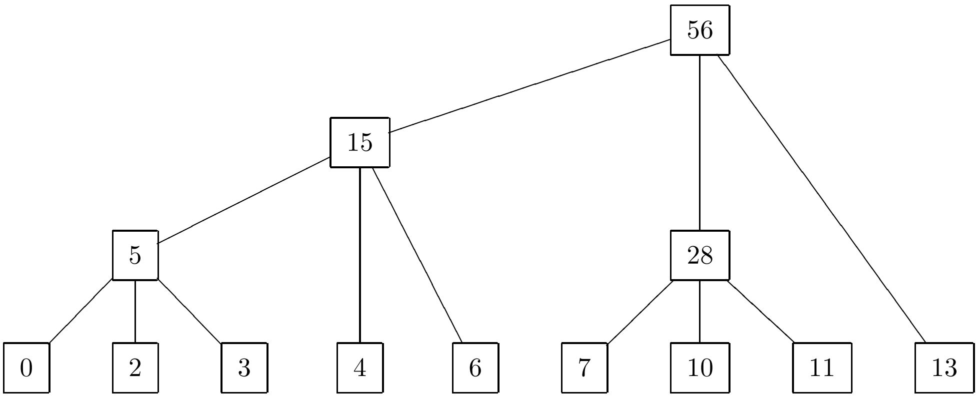
(c) Wiederhole (b) $\left\lfloor \frac{|M|}{2} \right\rfloor - 1$ mal.

Test des Algorithmus für obiges Beispiel:



Wie man sieht, entsteht (fast) der optimale Baum aus der ersten Überlegung.

Konstruiiere optimalen ternären Baum mit $n = 8$:



---

42. (a) $G = (g_0, g_1, g_2, ..., g_{n-1})$
$\forall\, i, j$ mit $i < j\ :\ g_i < g_j$
STÜKO : (G, W)
$f : \mathbb{R}\times$ STÜKO $\rightarrow \mathbb{R}$
$W = (w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-2})$

$\{min(G) < x \leq max(G)\}$
$y = f(x, (G, W))$
$\{y = w_i; w_i \in W; i = min(G') - 1; \forall g_j \in G : g_j \geq x \Leftrightarrow j \in G'\}$

$\{x \leq min(G) \vee x > max(G)\} y = f(x, (G, W)) \{y = 0\}$

G sind die Intervallgrenzen (z.B. x_0, x_1, x_2), W sind die Funktionswerte dazwischen (z.B. y_0, y_1), also $f(x) = y_0$, wenn x zwischen x_0 und x_1 und $f(x) = y_1$, wenn x zwischen x_1 und x_2.
G' ist eine Menge aller Indizes der Elemente von G, welche größer sind als x.
$\min(G')$ ist also der Index der nächsten Intervallgrenze über x; damit muss w_i der richtige Funktionswert sein.

(b) add: STÜKO $\times$ STÜKO $\rightarrow$ STÜKO
{true}
(G3, W3) = add((G1, W1), (G2, W2))
{G3 = sort(G1 $\cup$ G2) ; $\forall w_i \in W3$ gilt $w_i = f(g3_{i+1}, (G1, W1)) + f(g3_{i+1}, (G2, W2)), g3_j \in G3$}

mul: STÜKO $\times$ STÜKO $\rightarrow$ STÜKO
{true}
(G3, W3) = mul((G1, W1), (G2, W2))
{G3 = sort(G1 $\cup$ G2) ; $\forall w_i \in$ W3 gilt $w_i = f(g3_{i+1}, (G1, W1)) \cdot f(g3_{i+1}, (G2, W2)), g3_j \in G3$}

{true} G' = sort(G) $\{\forall g$ gilt $g \in G' \Leftrightarrow g \in G; \forall i, j$ mit $i < j\ :\ g'_i \leq g'_j\}$

Man vereinige die Grenzenmengen (doppelte werden dabei ja gekillt), sortiere die neue Menge (sind ja indizierte Mengen) und berechne die neuen Funktionswerte aus der Addition/Multiplikation der Funktionswerte der einzelnen Funktionen an den Intervallgrenzen. (hierbei die Definitionsbereiche vereinigt...)

---

43. Zu zeigen:

$$istenthalten(u, einf\ddot{u}ge(x, l\ddot{o}sche(x, M))) \quad = \quad istenthalten(u, einf\ddot{u}ge(x, M))$$

Es müssen die Fälle $u = v$ und $u \neq v$ unterschieden werden. Es sind also 2 Fälle.

1.Fall $(u = x)$**:**

$$\begin{aligned}
(LS)\ istenthalten(u, einf\ddot{u}ge(x, l\ddot{o}sche(x, M))) \quad &= \quad istenthalten(x, einf\ddot{u}ge(x, l\ddot{o}sche(x, M))) \\
&\quad\quad \text{(da u=x)} \\
&\quad\quad (\text{Setze } M' = l\ddot{o}sche(x, M)) \\
&= \quad istenthalten(x, einf\ddot{u}ge(x, M')) \\
&=^{(2)} \quad \underline{wahr} \\
(RS)\ istenthalten(u, einf\ddot{u}ge(x, M)) \quad &= \quad istenthalten(x, einf\ddot{u}ge(x, M)) \\
&\quad\quad \text{(da u=x)} \\
&=^{(2)} \quad \underline{wahr}
\end{aligned}$$

2.Fall $(u \neq x)$**:**

$$\begin{aligned}
(LS)\ istenthalten(u, einf\ddot{u}ge(x, l\ddot{o}sche(x, M))) \quad &= \quad \underline{istenthalten(u, einf\ddot{u}ge(x, l\ddot{o}sche(x, M)))} \\
(RS)\ istenthalten(u, einf\ddot{u}ge(x, M)) \quad &=^{(3)} \quad istenthalten(u, M) \\
&=^{(5)} \quad istenthalten(u, l\ddot{o}sche(x, M)) \\
&\quad\quad (\text{Setze } M' = l\ddot{o}sche(x, M)) \\
&= \quad istenthalten(u, M') \\
&=^{(3)} \quad istenthalten(u, einf\ddot{u}ge(x, M')) \\
&\quad\quad (M' \text{ wieder ersetzen}) \\
&=^{(3)} \quad \underline{istenthalten(u, einf\ddot{u}ge(x, l\ddot{o}sche(x, M)))} \\
&= \quad (LS)
\end{aligned}$$

Für beide Umformungen entstehen jeweils Identitäten. $\square$
