Aufgabe 63:
Wenden die den Algorithms von Dijkstra zur Bestimmung der kürzesten Wege im folgenden gerichteten Graphen an: V = {1, 2, . . . , 6}, der Graph ist vollständig, das heißt, von jedem Knoten gibt es eine Kante zu jedem anderen Knoten, und die Kantenlängen sind
$c_{ij} = 3^{j-i}$ für $i < j$ und $c_{ij} = i - j$ für $i > j$. Der Startknoten ist der Knoten 2.

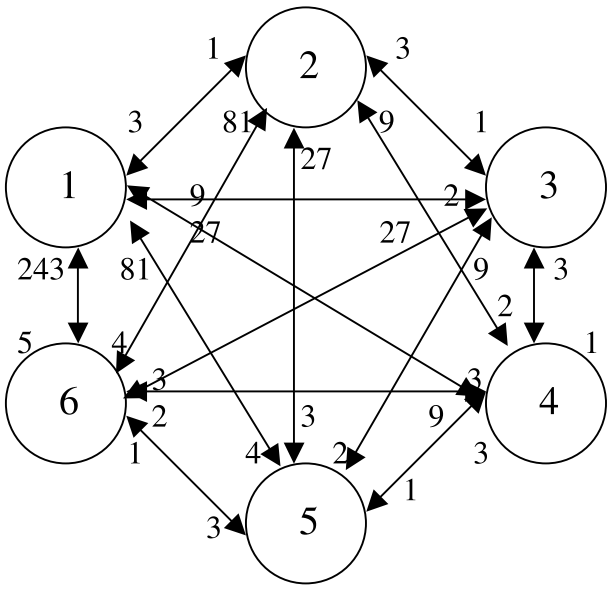
geg.: V = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Kantenlängen: $c_{ij} = 3^{j-i}$ für $i < j$
$c_{ij} = i-j$ für $i > j$
da c_{ij} für $(i = j)$ nicht definiert ist gehe ich davon aus, dass es keine Kanten zum eigenen Knoten gibt

Lösung:

Die Tabelle zeigt wie gewichtet die Übergänge zwischen den Knoten sind:

$_j\backslash^i$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	3	0	1	2	3	4
3	9	3	0	1	2	3
4	27	9	3	0	1	2
5	81	27	9	3	0	1
6	243	81	27	9	3	0

Daraus ergibt sich folgender Graph:



Berechnung des kürzesten Weges vom Startknoten x zum Zielknoten z.
Wenn der kürzeste Weg von x zu z über y führt, dann sind die Teilwege $x \rightarrow y$ und $y \rightarrow z$ ebenfalls kürzeste Wege.

N: noch nicht besuchte Knoten
G: gesehene Knoten, also alle die Knoten (sortiert nach Weglänge)
B: Speicher; alle Knoten werden hier der Weglänge nach gespeichert

1. Schritt:

N	1	3	4	5	6	
G	2					
B						

2. Schritt:

N	~~1~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	
G	~~2~~	3	4	5	1	6
B	2					

3. Schritt:

N	~~1~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	
G	~~2~~	~~3~~	4	5	1	6
B	2	3				

4. Schritt:

N	~~1~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	
G	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	1	6
B	2	3	4			

5. Schritt:

N	~~1~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	
G	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	1	6
B	2	3	4	5		

6. Schritt:

N	~~1~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	
G	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~1~~	6
B	2	3	4	5	1	

7. Schritt:

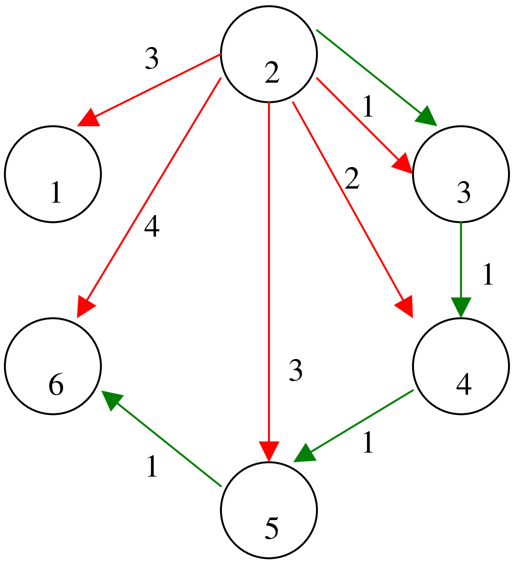
N	~~1~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	
G	~~2~~	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~1~~	~~6~~
B	2	3	4	5	1	6

Ergebnis:

S ist unser Startknoten und wir suchten ja den kürzesten Weg vom Startknoten zu jedem einzelnen Knoten.
Unser Startknoten ist 2:

- von diesem aus hat der Knoten 3 den kürzesten Weg, nämlich 1
  - ⇒ Der kürzeste Weg vom Startknoten 2 zum Knoten 3 ist der direkte Weg und der ist 1
- von diesem aus hat der Knoten 4 den kürzesten Weg, einmal direkt mit der Länge 2 oder indirekt über 3 mit der Weglänge von je 1 (dies ergibt in der Addition wieder 2)
  - ⇒ der kürzeste Weg vom Startknoten 2 zum Knoten 4 ist entweder der direkte Weg oder der indirekte Weg über den Vorgänger 3
- von diesem aus hat der Knoten 5 den kürzesten Weg, einmal direkt mit der Länge 3 oder indirekt über die Vorgänger 3 und 4 mit der Weglänge von jeweils 1 (dies ergibt in der Addition wieder 3)
  - ⇒ der kürzeste Weg vom Startknoten 2 zum Knoten 5 ist entweder der direkte Weg oder der indirekte Weg über die Vorgänger 3 und 4
- von diesem aus hat der Knoten 1 den kleinsten Abstand durch den direkten Weg, nämlich 3
  - ⇒ der kürzeste Weg vom Startknoten 2 zum Knoten 1 ist der direkte Weg und der ist 3 (über die anderen Knoten des Graphen ergibt sich jeweils eine längere Weglänge – siehe Graph)
- von diesem aus hat der Knoten 6 den kürzesten Weg, einmal direkt mit der Länge 4 oder indirekt über die Vorgänger 3, 4 und 5 mit der Weglänge von je 1 (dies ergibt in der Addition 4)
  - ⇒ der kürzeste Weg vom Startknoten 2 zum Knoten 6 ist entweder der direkte Weg oder der indirekte Weg über die Vorgänger 3, 4, und 5

Cornelia Feist
Tutor: Till Zoppke



Legende:  ≙ direkten Weg

 ≙ indirekter Weg

Für die Weglänge spielt es keine Rolle, ob man von Knoten 2 zu bspw. Knoten 4 über den Knoten 3 gelangt, oder direkt von Knoten 2 zu Knoten 4.
Die Weglänge ist in beiden Fällen/auf beiden Wegen identisch.
Lediglich Knoten 1 erreicht man nur auf direktem (ohne Zwischenknoten) Wege (in dieser Aufgabe der kürzeste Weg) von Knoten 2 aus auf dem kürzesten Weg.
Der Weg von Knoten 2 über die anderen Knoten zu Knoten 1 zu gelangen ist immer größer/länger.
Da die Knoten vom Startknoten aus direkt erreicht werden können, würde man wahrscheinlich den direkten Weg bevorzugen, denn die Knoten sind dann schon gesehen worden. „Längenmässig“ macht es aber wie schon erwähnt keinen Unterschied.